

## CALCUL DES TRANSFERTS THERMIQUES ENTRE FILM CHAUD ET SUBSTRAT PAR UN MODELE A DEUX DIMENSIONS: PREVISION DE LA REPONSE DYNAMIQUE DE SONDES USUELLES

J. F. BRISON, G. CHARNAY et G. COMTE-BELLOT  
 Laboratoire de Mécanique des Fluides, Associé au CNRS, Ecole Centrale de Lyon,  
 36, route de Dardilly, 69130 Ecully, France

(Reçu le 13 Avril 1978)

**Résumé**—Un modèle à deux dimensions est élaboré pour rendre compte des transferts thermiques entre film chaud et substrat de quartz d'une sonde. Les calculs sont effectués par la méthode des éléments finis et fournissent la réponse dynamique des sondes aux fluctuations de vitesse et aux fluctuations de température. Les effets de l'épaisseur relative et du nombre de Biot sont également précisés. Le modèle est ensuite utilisé pour la détermination des comportements de deux sondes usuelles, l'une en forme de cône, l'autre en forme de dièdre. La réponse en fréquence est d'autant meilleure que le film est disposé plus en amont sur l'extrémité de la sonde.

### NOMENCLATURE

#### Grandeurs physiques

- $a$ , diffusivité thermique ( $a = k/\rho C$ );
- $C$ , chaleur spécifique;
- $f$ , fréquence;
- $H$ , épaisseur du substrat;
- $I$ , intensité électrique du courant d'alimentation du film;
- $k$ , conductivité thermique;
- $L$ , longueur du film chaud;
- $Q$ , densité du flux de chaleur moyen;
- $q$ , densité du flux de chaleur fluctuant;
- $q_T$ , densité du flux de chaleur libérée par le film;
- $R$ , résistance électrique instantanée du film chaud;
- $n$ , coordonnée normale au contour;
- $r, z$ , coordonnées axisymétriques;
- $t$ , temps;
- $x, y$ , coordonnées rectangulaires;
- $U_A$ , vitesse moyenne du milieu ambiant;
- $u_A e^{i\omega t}$ , vitesse fluctuante du milieu ambiant.

#### Symboles grecs

- $\alpha$ , coefficient de transfert convectif;
- $\Gamma$ , contour du domaine de définition;
- $\Theta$ , température moyenne;
- $\theta e^{i\omega t}$ , température fluctuante;
- $\mu$ , viscosité dynamique;
- $\nu$ , viscosité cinématique;
- $\rho$ , masse volumique;
- $\phi$ , déphasage;
- $\chi$ , coefficient de variation de la résistance du film en fonction de la température dans une loi linéaire;
- $\Omega$ , domaine de définition;
- $\omega$ , pulsation,  $\omega = 2\pi f$ .

#### Facteurs sans dimension

- $Bi$ , nombre de Biot  $\alpha H/k_S$ ;
- $Nu$ , nombre de Nusselt  $\alpha L/k_A$  moyenné sur  $L$ ;
- $Pr$ , nombre de Prandtl  $\mu_A C_A/k_A$ ;
- $Re$ , nombre de Reynolds  $U_A L/\nu_A$  moyenné sur  $L$ ;
- $\Delta$ , pulsation réduite  $H(\omega/2a)^{1/2}$ .

#### Indices

- $A$ , relatif au milieu ambiant;
- $H$ , relatif au film chaud ( $y = H$ );
- $0$ , relatif à la face du substrat opposée au film chaud ( $y = 0$ );
- $S$ , relatif au substrat;
- $x$ , relatif à un nombre de Nusselt local.

### I. INTRODUCTION

L'IMPORTANCE des échanges thermiques entre un film chaud et son substrat de quartz a été mise en évidence par les travaux de Bellhouse et Schultz [1] et Bellhouse et Rasmussen [2]. Leur analyse s'appuie sur un modèle à une dimension (1D) dans lequel la conduction thermique dans le substrat s'effectue suivant la normale au film, ce dernier étant maintenu à température constante, tandis que la face opposée du substrat est refroidie par convection forcée. Les pertes thermiques qui existent alors dans le substrat sont d'autant plus importantes que le nombre de Biot du système sonde-milieu ambiant est petit. Ce résultat a permis d'interpréter le fait que les intensités des fluctuations de vitesse mesurées dans l'air (par des films chauds étalonnés de façon statique) étaient de 50% inférieures aux valeurs classiques, alors que les mesures effectuées dans l'eau conduisaient à des valeurs plus correctes (Bankoff et Rossler [3]).

Les sondes à film chaud utilisées dans la pratique possèdent toutefois des caractéristiques, qui s'écartent de ce modèle simple. Des extensions du modèle de Bellhouse sont donc nécessaires ; en effet :

(1) Des transferts thermiques supplémentaires peuvent avoir lieu longitudinalement entre le film chaud et les parties du substrat situées en amont ou en aval du film. Pour leur évaluation et leur conséquence sur la réponse dynamique du film, un modèle à deux dimensions est la première étape à envisager dans le cas d'un film d'allongement fini. L'élaboration de ce modèle sera faite à la Section III. La résolution numérique utilisera la méthode des éléments finis qui s'adapte bien aux conditions aux limites à vérifier.

(2) L'écoulement incident peut présenter des fluctuations de température en plus des fluctuations de vitesse. La réponse de la sonde n'est pas *a priori* la même dans les deux cas, et un premier examen dû à Comte-Bellot [4], dans un modèle à une dimension, montre les différences possibles. En particulier, il subsiste une notable atténuation de la réponse dynamique aux fluctuations de température même pour les mesures effectuées dans l'eau. L'estimation des pertes longitudinales sera donc, là encore, un complément d'informations utile à connaître (cf. Section III).

(3) Les films chauds peuvent être incorporés à un montage à intensité constante plutôt qu'à un montage à température constante comme supposé dans les travaux rappelés ci-dessus. Ce cas sera effectivement examiné à la Section II, mais nous verrons que les effets d'inertie se révèlent considérables, de sorte que ce type de montage ne constitue pas un choix judicieux.

(4) Enfin, les sondes usuelles ont des géométries qui s'écartent de celle où le substrat est limité par deux plans parallèles. C'est par exemple le cas des sondes coniques ou des sondes en forme de dièdre. Comme la méthode numérique utilisée pour élaborer le modèle à deux dimensions a l'avantage d'être adaptable à diverses géométries, les réponses des sondes usuelles mentionnées pourront être assez aisément estimées (cf. Section V).

## II. MODELISATIONS A UNE DIMENSION (1D) D'UNE SONDE A FILM CHAUD

Ce paragraphe résume les principaux résultats déjà obtenus à l'aide du modèle 1D pour un film maintenu à température constante [1], [2], [4] et les complète en développant les solutions correspondant au cas où le film est alimenté par un courant électrique d'intensité constante.

Par rapport aux travaux antérieurs le même modèle géométrique (Fig. 1) est retenu et seule la loi d'échange de chaleur par convection avec le milieu ambiant est légèrement modifiée. On a ainsi utilisé l'expression

$$Nu = 0.664Re^{1/2}Pr^{1/3} \quad (1)$$

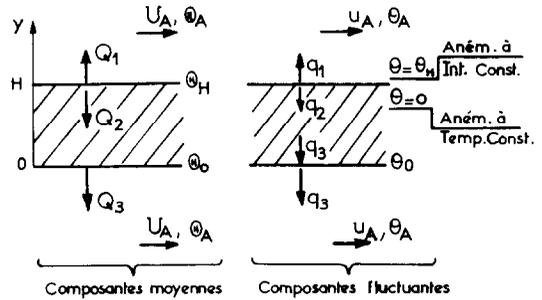


FIG. 1. Modèle à dimension (1D): rappel des principales notations.

qui caractérise un échange moyenné le long d'un film disposé sans incidence sur le bord d'attaque d'une sonde entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . Cette loi fournit une valeur de la densité de flux de chaleur  $Q$  sensiblement surévaluée pour un film placé en aval du bord d'attaque d'une paroi. Pour prendre en compte l'ensemble des mécanismes, tant convectifs que conductifs, il est intéressant de mettre l'expression (1) sous la forme

$$\frac{\alpha H}{k_S} = \frac{H}{L} \frac{k_A}{k_S} 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

où  $\alpha H/k_S$  est le nombre de Biot caractéristique de la sonde.

Dans le cas où le milieu ambiant présente des fluctuations de vitesse ou de température, nous supposons que la loi (1) demeure valable instantanément. Cette hypothèse reste satisfaisante pour des fluctuations d'amplitudes petites devant la moyenne et de fréquences réduites vis à vis des fréquences caractéristiques de la couche limite [5] et [6].

Le modélisation de la sonde à film chaud fonctionnant à température constante nous conduit à rechercher la valeur de  $[q_T/(q_T)_{\omega \rightarrow 0}]^{1/2}$  liée au flux de chaleur libéré par le film. Pour le montage à intensité constante c'est le rapport  $\theta_H/(\theta_H)_{\omega \rightarrow 0}$  qui détermine la réponse de la sonde puisque  $\theta_H$  est proportionnel à la résistance du film, quantité mesurée dans la pratique. Dans le modèle 1D, on montre que ces fonctions de transfert ne dépendent que de deux groupements pour la sonde à température constante: la fréquence réduite  $\Delta = H(\omega/2a)^{1/2}$  et le nombre de Biot  $Bi = \alpha H/k_S$ . A ceux ci s'ajoute le facteur  $R_A I^2 \chi H/k_S$  pour la sonde à intensité constante.

Les annexes 1 et 2 établissent les deux solutions respectives dont les représentations polaires sont données sur les Figs. 2 et 3 pour deux valeurs de  $Bi$  caractéristiques. Les tracés choisis permettent de comparer les réponses obtenues avec des fluctuations de vitesse et des fluctuations de température. Dans le cas du montage à température constante (Fig. 2), on constate une atténuation dynamique plus importante dans le cas des fluctuations de température que dans le cas des fluctuations de vitesse. Cette différence très nette résulte de la présence supplémentaire du facteur  $1 + Bi$  dans la fonction de transfert cinéma-

tique. En revanche, on ne relève que peu de différence entre les deux réponses du montage à intensité constante. Toutefois, pour ce dernier, les réponses dynamiques s'annulent très rapidement lorsque la fréquence augmente. Ce comportement est

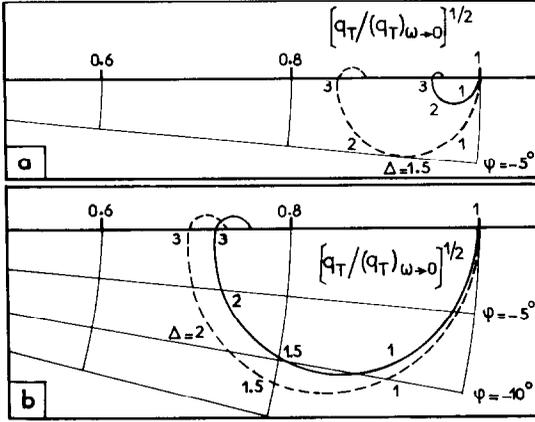


FIG. 2. Film chaud à température constante: représentation polaire de la réponse en fréquence du modèle 1D.  $H = 10^{-4}$  m,  $k_s = 1,36$  W/m°C,  $a = 7,910^{-7}$  m<sup>2</sup>/s. —: fluctuation de la vitesse; ---: fluctuation de la température. (a)  $Bi = 2,4$  (milieu ambiant: eau,  $U_A = 0,3$  m/s). (b)  $Bi = 0,16$  (milieu ambiant: air,  $U_A = 30$  m/s).

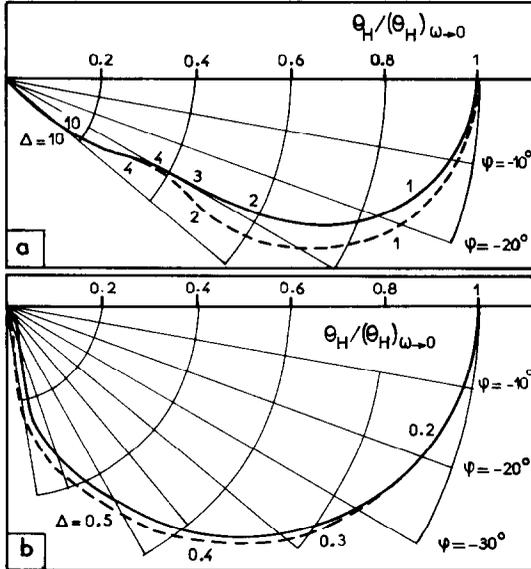


FIG. 3. Film chaud à intensité constante: représentation polaire de la réponse en fréquence du modèle 1D. (a)  $Bi = 2,4$ . (b)  $Bi = 0,16$ . Mêmes caractéristiques que celles données sur la Fig. 2.

à rattacher au fonctionnement passif du montage à intensité constante qui ne bénéficie d'aucun asservissement. Dans la suite, en raison de cette très défavorable réponse du montage à intensité constante, nous ne porterons notre attention que sur le montage à température constante.

### III. RESOLUTION DU MODELE A DEUX DIMENSIONS (2D)

Pratiquement la modélisation de la sonde 2D ne peut être envisagée que par la mise en oeuvre d'une méthode de calcul numérique. Nous avons adopté celle des éléments finis pour trois raisons: la facilité de prise en charge des conditions aux limites, la liberté de choisir le degré d'approximation, et la possibilité de modéliser des supports de sonde à géométrie complexe ou à structure anisotrope.

#### III.1. Formulation numérique

On ne rappelle ici que les grandes lignes de la méthode en renvoyant à [7] pour les détails.

En général, pour les sondes de mesure, le transfert de chaleur par conduction dans le support satisfait l'équation

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_s \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \rho_s C_s \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

applicable sur un domaine  $\Omega$  bordé par un contour  $\Gamma$  (Fig. 4). En l'absence de rayonnement les conditions

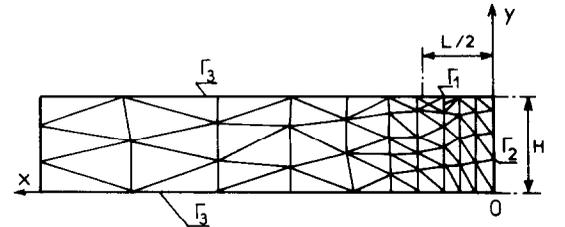


FIG. 4. Modèle à deux dimensions (2D): maillage utilisé.

aux limites rencontrées sont de trois types:

$$\theta = \theta_H \text{ sur } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$k_s \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \quad (4)$$

$$k_s \frac{\partial \theta}{\partial n} + \alpha(\theta - \theta_A) = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (5)$$

Désignons alors par  $\theta^*$  une approximation de la solution recherchée, mise sous forme de la combinaison linéaire suivante

$$\theta^* = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) \theta_i(t) = [N] \{\theta\}$$

où  $N_i$  sont les fonctions d'approximation classiques, définies par morceaux, élément par élément, et  $\theta_i$  les températures en  $m$  points discrétisés de  $\Omega$ . En suivant la méthode de Galerkin on montre que  $\{\theta\}$  est solution de

$$\int_{\Omega} \{N\} \mathcal{L}(\theta^*) d\Omega = 0.$$

Après utilisation du théorème de Green et développement, il vient l'équation matricielle suivante

$$[K] \{\theta\} + [M] \left\{ \frac{d\theta}{dt} \right\} = \{P\} \quad (6)$$

où les matrices  $[K]$ ,  $[M]$  et  $[P]$  sont déterminées par les fonctions d'approximations  $[N]$ . Le domaine  $\Omega$  étant découpé en éléments finis de surface  $\Omega_j$ , on peut alors expliciter  $[K]$ ,  $[M]$  et  $[P]$  de la façon suivante

$$[K] = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Omega_j} [\{N_{,x}\} k_s [N_{,x}] + \{N_{,y}\} k_s [N_{,y}]] d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_j} \alpha \{N\} [N] d\Gamma$$

$$[M] = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Omega_j} \rho_s C_s \{N\} [N] d\Omega$$

$$\{P\} = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} \alpha \{N\} [N] d\Gamma \{\theta_\infty\}.$$

Pour l'intégration dans le temps un schéma simple qui assure une stabilité inconditionnelle, est celui

Dans les calculs qui suivent, des éléments triangulaires ont été utilisés avec une approximation linéaire de  $\theta$  sur chacun d'eux. La résolution de (7) se fait par élimination de Gauss, et la solution du régime permanent sert de condition initiale.

Le programme de calcul permet aussi le traitement de problèmes axisymétriques en supposant  $x \equiv r$ ,  $y \equiv z$  et en utilisant les coefficients "équivalents" suivants  $k = rk$ ,  $\rho C = r\rho C$ ,  $\alpha = r\alpha$ .

### III.3. Test du modèle numérique

Le programme de calcul est contrôlé en utilisant une géométrie rectangulaire dont la face  $y = 0$  satisfait à la condition mixte (5) tandis que, la face  $y = H$  simule la présence du film chaud et satisfait (3).

La solution analytique rappelée en annexe 1 permet la comparaison avec la solution obtenue par éléments finis (Table 1).

Table 1. Comparaison entre solution analytique (A) et calculs numériques (N) obtenus avec le modèle 1D  
 $k_s = 1,36 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $a = 7,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $H = 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\alpha = 2,13 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$

$H \left( \frac{\omega}{2a} \right)^{1/2}$	Fluctuation de vitesse				Fluctuation de température			
	$\frac{q_T}{(q_T)_{\omega \rightarrow 0}}$		$\phi$ (degré)		$\frac{q_T}{(q_T)_{\omega \rightarrow 0}}$		$\phi$ (degré)	
	A	N	A	N	A	N	A	N
0,125	1	1	-0,35	-0,47	1	1	-0,38	-0,36
1,5	0,639	0,642	-19°, 88	-20°, 32	0,614	0,613	-22°, 54	-22°, 88
$\rightarrow \infty$	0,572	0,587	0 <sup>+</sup>	0 <sup>-</sup>	0,536	0,538	0 <sup>+</sup>	0 <sup>-</sup>

centré en  $t + (\Delta t/2)$ . L'équation (6) s'écrit alors

$$\left[ K + \frac{2M}{\Delta t} \right] \{\theta\}^{n+1} = \{P\}^n + \{P\}^{n+1} + \left[ \frac{2M}{\Delta t} - K \right] \{\theta\}^n \quad (7)$$

où  $\{\theta\}^n$  représente la solution obtenue au pas précédent ou encore les conditions initiales.

### III.2. Simulation de la sonde

La connaissance du champ des gradients thermiques instantanés dans le substrat et le calcul de

$$q_2 = \int_{(c)} -k_s \frac{\partial \theta}{\partial n} dc$$

sur un contour (c) aussi proche que possible du film, permet la comparaison, sur une période, entre le flux convecté  $q_1$  par l'écoulement extérieur et le flux  $q_2$  échangé avec le substrat par conduction.

Lorsque la fréquence  $f$  du champ extérieur fluctuant augmente, un retard et une réduction de l'amplitude de la composante  $q_2$  apparaissent, ce qui a pour conséquence pratique de faire dévier la réponse de la sonde par rapport au cas où  $f$  tend vers zéro, cas qui correspond à l'étalonnage statique. La phase, que l'on peut déterminer par analyse de Fourier, ainsi que l'amplitude du premier harmonique de la somme  $q_1 + q_2$ , sont alors des quantités essentielles pour la détermination de la sensibilité de la sonde.

En dépit d'un maillage relativement grossier (4 éléments seulement sont disposés sur l'épaisseur  $H$ , Fig. 4), les résultats analytiques et les résultats numériques diffèrent de moins de 1%. Par ailleurs, les solutions numériques apparaissent indépendantes de l'amplitude relative des fluctuations. Ce comportement est à prévoir car il est lié à la formulation et à la linéarité du problème; ne sont en effet pas prises en compte les éventuelles variations du coefficient de transfert convectif  $\alpha$  en fonction de  $u_A/U_A$  ou de  $\theta_A/(\Theta_H - \Theta_A)$ .

## IV. EFFETS GEOMETRIQUES

### IV.1 Echanges thermiques longitudinaux

Pour illustrer le rôle des effets longitudinaux, nous utilisons la géométrie rectangulaire précédente (Fig. 4) dont la face  $y = H$  a été divisée en deux parties. Un segment de type  $\Gamma_1$ , de longueur  $H/2$  simule le film chaud et se poursuit par un contour de type  $\Gamma_3$ . Les parties latérales sont des lignes de symétrie, l'extrémité située à gauche a été choisie suffisamment éloignée du film pour ne pas affecter les résultats. A des fins de comparaison, les valeurs des paramètres physiques et du coefficient d'échange  $\alpha$  utilisées à la Section II sont conservées.

Les résultats relatifs aux amplitudes réduites et aux phases sont donnés sous forme polaire sur la Fig. 5. Par rapport au modèle 1D, on note une forte majoration du flux thermique diffusant dans le support, essentiellement dans le cas de l'air et d'une

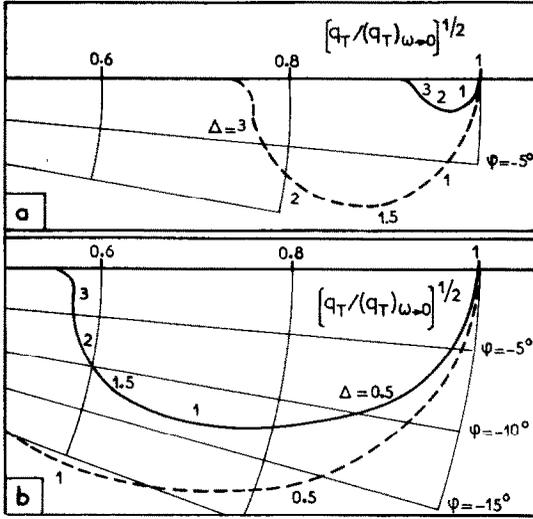


FIG. 5. Réponse en fréquence d'un film chaud à température constante (2D).  $H = 10^{-4}$  m,  $L = 10^{-4}$  m. (a)  $Bi = 2,4$ . (b)  $Bi = 0,16$ . —: fluctuation de la vitesse; ----: fluctuation de la température. Mêmes caractéristiques que celles de la Fig. 2.

fluctuation de température. Il en résulte une atténuation très importante de la réponse dynamique de la sonde.

Pendant, dans la réalité, si les échanges de chaleur de type convectif restent grands à l'aplomb du film chaud, ils tendent vite à diminuer dans les régions situées de part et d'autre. En effet, les lois locales d'échange liant  $Nu(x)$  à  $Re(x)$  conduisent, en l'absence de singularité, à une variation de  $\alpha$  proportionnelle à  $x^{-1/2}$ , variation dont nous n'avons pas tenu compte en conservant sur la totalité du contour  $\Gamma_3$  la valeur issue de l'équation (1).

En fait, les résultats du modèle 2D portés sur la Fig. 5 n'illustrent que le rôle des effets longitudinaux. Ceux-ci ayant été surévalués, les résultats obtenus reflètent une situation extrême qui n'est heureusement jamais atteinte en pratique.

#### IV.2. Influence des caractéristiques du support

A la différence du cas 1D où  $H(\omega/2a)^{1/2}$  et  $Bi$  sont les deux seuls groupements intervenant dans la solution analytique, le cas 2D dépend en plus, dans les conditions d'étude choisies, du paramètre géométrique  $H/L$ .

Les effets de  $H/L$  sont analysés dans un but comparatif pour de l'air et dans le cas d'une fluctuation de vitesse seulement (Fig. 6). On constate qu'on améliore le comportement dynamique de la sonde en augmentant l'épaisseur relative du support de film. Les effets thermiques parasites issus du bord opposé ( $y = 0$ ) au film chaud sont alors atténués par un trajet plus long. Contrairement au cas 1D, la réponse limite ( $H/L \rightarrow \infty$ ) reste imparfaite à cause des pertes parasites longitudinales de la face  $y = H$ .

Les courbes de la Fig. 7 sont obtenues pour différents nombres de Biot et avec la valeur  $H/L = 1$ . Bien évidemment une augmentation de  $Bi$ , dûe

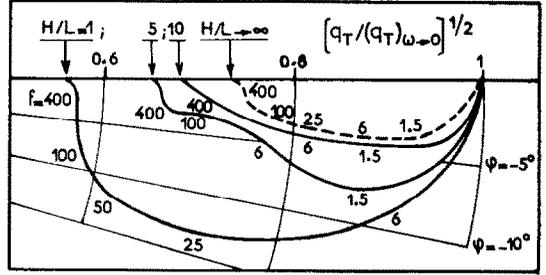


FIG. 6. Influence du paramètre  $H/L$  (fluctuation de la vitesse;  $Bi = 0,16$ ;  $L = 10^{-4}$  m).

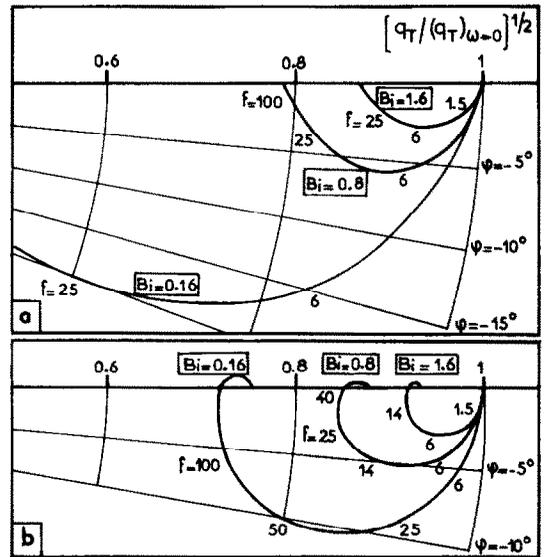


FIG. 7. Influence du nombre de Biot. (a) cas 2D. (b) cas 1D (fluctuation de la vitesse;  $L = H = 10^{-4}$  m).

par exemple à une diminution de  $k_s$ , provoque une atténuation plus faible de  $[q_T/(q_T)_{\omega \rightarrow 0}]^{1/2}$ . Lorsque  $Bi$  tend vers l'infini, les effets géométriques n'ont plus d'influence, les réponses 1D et 2D devenant toutes deux parfaites.

#### V. ETUDE DE DEUX SONDÉS USUELLES

La difficulté majeure de la modélisation d'un cas réel consiste à préciser localement les échanges convectifs de chaleur entre le support de sonde ou le film chaud et le milieu ambiant.

##### V.1. Sonde en forme de dièdre

Le premier cas pratique traité par le modèle à deux dimensions, est celui d'une sonde en forme de dièdre (DISA 55 A 80) dont la géométrie rappelée sur la Fig. 8, a été donnée dans [2]. En ce qui concerne le choix de la loi d'échange on doit distinguer deux régions.

La première est la partie arrière du support (angle au sommet  $10^\circ$ ), en aval du film chaud, où nous avons choisi la loi locale:

$$Nu(x) = 0.33Re^{1/2}(x)Pr^{1/3} \quad (8)$$

correspondant aux échanges entre écoulement laminaire et plaque plane en l'absence de gradient de

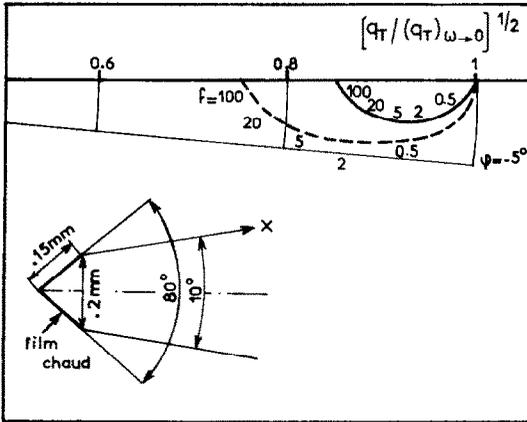


FIG. 8. Sonde en forme de dièdre. ----: fluctuation de la température; —: fluctuation de la vitesse. Milieu ambiant: air ( $U_A = 30$  m/s).

pression. Cette loi a été confirmée numériquement par un calcul de fluide parfait suivi d'un calcul de couches limites thermique et cinématique autour de l'obstacle formé par la sonde.

La seconde région est la partie avant (angle au sommet  $80^\circ$ ) qui supporte le film chaud et sur laquelle la loi (8) cesse d'être valide en raison du gradient de vitesse et de la proximité du bord d'attaque. Ainsi le calcul de couche limite indiqué précédemment est affecté d'une grande incertitude à cause d'instabilités liées aux conditions initiales à  $x = 0$ . Des écarts de  $\pm 100\%$  ont, par exemple, été constatés sur la première moitié de cette région. Les échanges convectifs pour cette seconde région sont donc estimés en assimilant l'arête supportant le film à un cylindre et en utilisant l'expression usuelle [8]

$$Nu_D = 2Re_D^{1/2} \cdot F(Pr) \quad (9)$$

qui fournit la valeur de l'échange thermique sur la ligne d'arrêt d'un cylindre de diamètre  $D$ . La fonction  $F(Pr)$  vaut 1,20 pour l'eau et 0,5 pour l'air. Compte tenu de la géométrie de la sonde, deux valeurs extrêmes de  $D$  ont été ajustées (1 fois et 0,3 fois le diamètre de raccordement égal à 0,2 mm) et le coefficient d'échange convectif  $\alpha$  à  $x = 0$  est pris égal à la demisomme des valeurs obtenues. A  $x = 0,15$  mm, correspondant à la frontière vers l'aval de cette seconde région, le coefficient d'échange local est déterminé simplement par (8). En adoptant alors une distribution linéaire de  $\alpha$  entre  $x = 0$  et  $x = 0,15$  mm on obtient, pour de l'air à 8,5 m/s, la loi

$$\alpha = 2000 - 1,03 \cdot 10^7 \cdot x \quad (\text{Unités S.I.})$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$Nu_x = \frac{1,76 \times 10^{-6}}{k_A} (2000 - 17,6 Re_x) Re_x.$$

La Fig. 8 présente des résultats pour une sonde placée dans un écoulement d'air de vitesse moyenne 30 m/s et qui présente des fluctuations de vitesse ou des fluctuations de température. Dans les deux cas les différences de phase restent toujours inférieures à

$5^\circ$ , valeur relativement petite. Par comparaison avec le cas 1D (Fig. 2) la réponse dynamique est améliorée essentiellement en ce qui concerne les phases. La confrontation des résultats de cette modélisation et des résultats d'expériences [2] n'est pas reportée ici, les quantités disponibles n'étant pas directement comparables.

## V.2. Sonde conique

Le second cas pratique considéré est à symétrie radiale. C'est celui d'une sonde présentant une pointe conique partiellement recouverte par le film chaud (DISA 55 A 87). Les échanges convectifs sont évalués de la même façon qu'à la Section V.1 (expression 8).

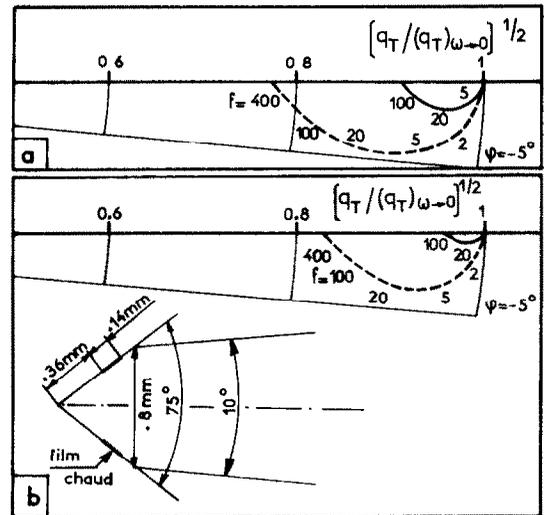


FIG. 9. Sonde conique. ----: fluctuation de la température; —: fluctuation de la vitesse. (a): milieu ambiant eau ( $U_A = 0,25$  m/s). (b): milieu ambiant eau ( $U_A = 1$  m/s).

Le milieu extérieur choisi est l'eau et deux vitesses moyennes d'écoulement ont été considérées (0,25 et 1 m/s). Ces résultats rassemblés en Fig. 9 indiquent que la réponse est plus dégradée que ne le laisse prévoir la modélisation 1D (Fig. 2), l'écart provenant sans doute de la position du film chaud situé en retrait par rapport à la pointe.

## VI. CONCLUSION

L'estimation par un modèle à deux dimensions des transferts de chaleur entre film chaud et substrat permet d'analyser le comportement en fréquence des sondes utilisées dans la pratique en prenant en compte la géométrie du substrat.

D'une façon générale les résultats du modèle à deux dimensions confirment les sens d'évolution prévus par le modèle à une seule dimension (Fig. 10). Les écarts entre les résultats obtenus par les deux modèles restent inférieurs à 20%. Néanmoins le modèle à une dimension minimise l'écart entre la réponse du film aux fluctuations de vitesse et la réponse aux fluctuations de température (Figs. 2-8 et 10).

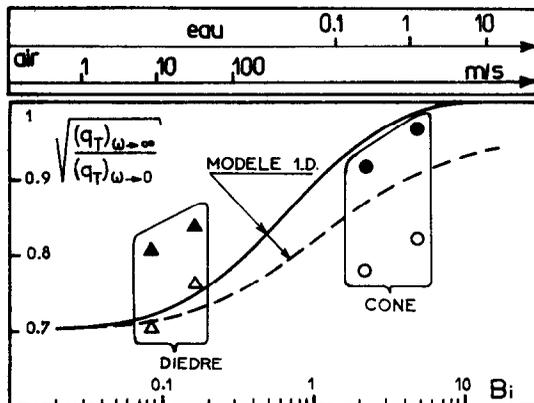


FIG. 10. Comparaisons des valeurs asymptotiques  $[(q_T)_{\omega \rightarrow \infty} / (q_T)_{\omega \rightarrow 0}]^{1/2}$ . —, ▲ et ● : fluctuation de vitesse. ---, △ et ○ : fluctuation de température.

Sur le plan des applications la sonde conique a une réponse en fréquence moins satisfaisante que celle de la sonde dièdre étudiée ici. Ce résultat apparaît même dans un milieu bon conducteur, comme l'eau, ceci contrairement à l'opinion généralement admise. Cet écart résulte d'une disposition différente des éléments sensibles sur chacun des substrats. Ainsi le film de la sonde dièdre est placé sur l'arête amont de la sonde tandis que celui de la sonde conique est situé en aval de la pointe et ne recouvre que 30% de la zone conique. Comme les échanges convectifs sont maximaux dans la région du bord d'attaque, le film de la sonde dièdre bénéficiera de ces échanges tandis que le substrat qui s'y trouve pour la sonde conique conduira à des transferts parasites importants dus à la conduction longitudinale.

Enfin, cette méthode de prévision, complétée par une description plus fine des échanges convectifs et extrapolée à trois dimensions, devrait permettre une optimisation de la plupart des sondes à films chauds utilisées en pratique.

Remerciements—Les auteurs remercient Melle M. Kreiss pour sa participation technique. Une aide financière partielle a été fournie par la DRET (contrat 76.109).

REFERENCES

1. B. J. Bellhouse and D. L. Schultz, The determination of fluctuating velocity in air with heated thin film gauges, *J. Fluid Mech.* **29**, 289–295 (1967).
2. B. J. Bellhouse and C. G. Rasmussen, Low frequency characteristics of hot-film anemometers, *Dise Information* **6**, 3–10 (1968).
3. S. G. Bankoff and R. S. Rosler, Constant temperature hot-

4. G. Comte-Bellot, The physical background for hot-film anemometry, in *Symposium on Turbulence in Liquids*, University Missouri-Rolla (1975).
5. M. J. Lighthill, The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity, *Proc. R. Soc.* **224**, 1–23 (1954).
6. T. J. Pedley, Heat transfer from a hot film in reversing shear flow, *J. Fluid Mech.* **78**, 513–534 (1976).
7. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London (1971).
8. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, London (1968).

ANNEXE I

Modelisation a une dimension d'une sonde operant a température constante

On considère un écoulement de fluide dont la vitesse, ou la température, varie périodiquement :

$$U'_A = U_A + u_A e^{i\omega t}$$

ou

$$\Theta'_A = \Theta_A + \theta_A e^{i\omega t}$$

Dans le substrat, le champ de température, en réponse à l'une ou l'autre de ces fluctuations est supposé de la forme

$$\Theta(y) + \theta(y) e^{i\omega t}$$

L'amplitude de la fluctuation  $\theta$  est alors solution de l'équation de diffusion

$$a \frac{d^2 \theta}{dy^2} = i\omega \theta \tag{A1}$$

soumise aux conditions

$$\theta(0) = \theta_0 \tag{A2}$$

$$\theta(H) = 0. \tag{A3}$$

Le transfert convectif de chaleur entre le support et l'écoulement de couche limite laminaire est caractérisé par le coefficient  $\alpha$  déduit de la loi d'échange

$$\frac{\alpha L}{k_A} = 0.664 \left( \frac{U_A L}{\nu_A} \right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \tag{A4}$$

Ce type d'échange fait apparaître une densité de flux instantané qui peut s'exprimer, en se limitant au premier ordre et par exemple à  $y = 0$ , sous la forme générale

$$q_3 = (\Theta_0 - \Theta_A) \frac{\partial \alpha}{\partial U_A} u_A + \alpha(\theta_0 - \theta_A) \tag{A5}$$

Dans le cas présent, soit  $u_A$ , soit  $\theta_A$  est nul. La détermination de  $\theta_0$  (equation A2) s'obtient en associant à (A5) la relation de conservation

$$k_S \left( \frac{d\theta}{dy} \right)_{y=0} + q_3 = 0.$$

Les amplitudes des fluctuations de flux de chaleur sont obtenues à l'aide des équations (A1)–(A3), (A5) et une relation équivalente à (A5) établie pour  $y = H$ . Les principaux résultats sont précisés sur le tableau suivant (Table A1).

Table A1.

Variable indépendante	Flux			
	$k_S \frac{d\theta}{dy} \Big _0$	$k_S \frac{d\theta}{dy} \Big _H = -q_2$	$q_1$	$q_3$
$u_A$	$\frac{k_S}{H} \theta_0 f_1$	$\frac{k_S}{H} \theta_0 f_2$	$\frac{Q_1}{2} \cdot \frac{u_A}{U_A}$	$\frac{Q_2}{2} \cdot \frac{u_A}{U_A} + \alpha \theta_0$
$\theta_A$	idem	idem	$-\alpha \theta_A$	$\alpha(\theta_0 - \theta_A)$

avec

$$f_1 = \frac{-\Delta(1+i)}{sh\Delta(1+i)}, f_2 = f_1 ch\Delta(1+i), \Delta = H(\omega/2\alpha)^{1/2}.$$

La quantité recherchée est la somme  $q_T = q_1 + q_2$ , densité de flux de chaleur libérée par le film, qui est une fonction de  $\Delta, Bi, Q_1$  et  $u_A/U_A$  ou  $\theta_A/(\Theta_H - \Theta_A)$  suivant le cas.

Les résultats précédents, ainsi que l'équation (A2) qui fixe  $\theta_0$ , permettent l'établissement, pour le modèle considéré, de la solution normalisée suivante (Table A2).

Table A2.

Variable indépend.	$q_T/(q_T)_{\omega \rightarrow 0}$
$u_A$	$\left\{1 + \frac{f_1}{(f_2 - Bi)(1 + Bi)}\right\} \cdot \left\{1 + \frac{1}{(1 + Bi)^2}\right\}^{-1}$
$\theta_A$	$\left\{1 + \frac{f_1}{f_2 - Bi}\right\} \cdot \left\{1 + \frac{1}{1 + Bi}\right\}^{-1}$

La solution de (A1) soumise aux conditions (A2) et (A6) complétées de (A4), (A5), (A7) et (A8) permettent de

ANNEXE II

Modélisation a une dimension d'une sonde operant a intensite constante

Ce modèle ne diffère du précédent que par les conditions à la limite  $y = H$  qui s'expriment pour les températures et les flux par

$$\theta(H) = \theta_H \tag{A6}$$

$$k_s \frac{d}{dy} (\Theta + \theta e^{i\omega t})|_{y=H} + Q_1 + q_1 e^{i\omega t} - R'I^2 = 0 \tag{A7}$$

avec  $R'$  résistance du film telle que

$$R' = R_A [1 + \chi(\Theta_H + \theta_H e^{i\omega t} - \Theta_A)]$$

où  $R_A$  est la résistance du film à la température  $\Theta_A$ .

Le transfert convectif avec le milieu ambiant est encore déterminé par une loi analogue à (5). Par exemple à  $y = H$ , on écrit

$$q_1 = (\Theta_H - \Theta_A) \frac{\partial \alpha}{\partial U_A} u_A + \alpha(\theta_H - \theta_A). \tag{A8}$$

déterminer la fluctuation de tous les flux de chaleur, à savoir

Table A3.

Variable indépendante	Flux			
	$k_s \frac{d\theta}{dy} _0$	$k_s \frac{d\theta}{dy} _H = -q_2$	$q_1$	$q_3$
$u_A$	$\frac{k_s}{H} (\theta_0 f_2 - \theta_H f_1)$	$\frac{k_s}{H} (\theta_0 f_1 - \theta_H f_2)$	$\frac{Q_1}{2} \cdot \frac{u_A}{U_A} + \alpha\theta_H$	$\frac{Q_2}{2} \cdot \frac{u_A}{U_A} + \alpha\theta_0$
$\theta_A$	idem	idem	$\alpha(\theta_H - \theta_A)$	$\alpha(\theta_0 - \theta_A)$

Pour ce type de fonctionnement le signal de détection est proportionnel à  $R'$  et par conséquent à  $\theta_H$ . La résolution de (A7) permet d'obtenir l'expression normalisée de  $\theta_H/(\theta_H)_{\omega \rightarrow 0}$ , qui caractérise la réponse dynamique de la sonde.

où

$$f_3 = HR_A I^2 \chi / k_s.$$

Pour les deux types de fluctuations, lorsque la fréquence  $f$  tend vers l'infini, le rapport  $\theta_H/(\theta_H)_{\omega \rightarrow \infty}$  est équivalent à  $K/(1+i)(\omega)^{1/2}$ .

Table A4.

Variable indépendante (fluctuation)	$\theta_H/(\theta_H)_{\omega \rightarrow 0}$
$u_A$	$\frac{1 + \frac{f_1}{(f_2 - Bi)(1 + Bi)}}{1 + (1 + Bi)^{-2}} \cdot \frac{f_3 + \frac{1}{1 + Bi} - (1 + Bi)}{f_3 - \frac{f_1^2}{f_2 - Bi} + f_2 - Bi}$
$\theta_A$	$\frac{1 + \frac{f_1}{f_2 - Bi} - \frac{f_3}{Bi}}{1 + \frac{1}{1 + Bi} - \frac{f_3}{Bi}} \cdot \frac{f_3 + \frac{1}{1 + Bi} - (1 + Bi)}{f_3 - \frac{f_1^2}{f_2 - Bi} + f_2 - Bi}$

TWO-DIMENSIONAL HEAT TRANSFER BETWEEN HOT-FILM AND SUBSTRATE:  
DYNAMICAL PREDICTION OF SOME USUAL PROBES

**Abstract**—A two-dimensional model is introduced to evaluate heat transfer in hot-film probes. Dynamical sensitivity to velocity or temperature fluctuations can be predicted using the Finite Element Method. The effects of substrate thickness and Biot number are analysed. The model is then applied to two common cases, conical and wedge-shaped probes. It is seen that backing material geometry and hot-film embedding strongly affect the frequency response. In particular, to minimize the heat leakage through the substrate, the sensor should be mounted as close as possible to the leading edge of the substrate.

DER ZWEIDIMENSIONALE WÄRMEÜBERGANG ZWISCHEN EINEM  
HEISSEN FILM UND SEINER UNTERLAGE: DIE DYNAMISCHE  
BERECHNUNG EINIGER ÜBLICHER SONDEN

**Zusammenfassung**—Ein zweidimensionales Modell wird aufgestellt, um den Wärmeübergang in Heißfilmsonden zu bestimmen. Die dynamische Empfindlichkeit gegenüber Schwankungen der Geschwindigkeit oder der Temperatur kann mit Hilfe der Methode der finiten Elemente berechnet werden. Die Einflüsse der Unterlagenstärke und der Biot-Zahl werden untersucht. Das Modell wird dann auf zwei gewöhnliche Fälle, die konische und die keilförmige Sonde angewendet. Es zeigt sich, daß die Geometrie des Grundmaterials und die Einbettung des Heißfilms den Frequenzgang stark beeinflussen. Im besonderen soll der Fühler so nah wie möglich an der Anströmkante der Unterlage angebracht werden, um wärmeverluste in die Unterlage so klein wie möglich halten.

ДВУХМЕРНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА МЕЖДУ ПЛЕНКОЙ ТЕРМОАНЕМОМЕТРА  
И ПОДЛОЖКОЙ

**Аннотация** — Предложена двухмерная математическая модель для расчета переноса тепла в пленочных термоанемометрах. Динамическую чувствительность к колебаниям скорости или температуры можно рассчитать с помощью метода конечных элементов. Анализируется влияние толщины подложки и величины числа Био на процесс теплопереноса. Эта модель проверена на коническом и клиновидном датчиках. Показано, что геометрия материала подложки и степень заглупления в нее пленки оказывают сильное влияние на частотную характеристику датчика. В частности, для того чтобы свести до минимума утечку тепла через подложку, датчик необходимо располагать по возможности ближе к ее передней кромке.